Escuela
de Finanzas
Aplicadas

Riesgos financieros

Introducción

Josechu Fernández. AFI, UAM (jlfernandez@afi.es)

Universidad de Murcia, Marzo de 2010

Reservas/capital/fondos que se precisan para cubrir variaciones negativas extremas que afectan al valor y/o alos flujos de los activos y los pasivos.

Gestión y control de riesgos financieros.

Compañía de seguros de autos

Supondremos cartera homogénea de pólizas de autos. $N = 1000$

- autos similares
- conductores similares
- daños cubiertos similares
- ...

Estadística

Disponemos de estadísticas filtradas, auditadas, que para una cartera "análoga" *en el pasado* nos dicen que

TABLA ESTADÍSTICA

Siniestro	Frecuencia
π_1	p_1
π_2	p_2
$\dots$	$\dots$
π_n	p_n

$\pi_1 = 0$; p_1 la frecuencia más grande.

Siniestro=variable aleatoria

Interpretamos que esa estadística es fruto de algún mecanismo aleatorio regular en cuanto a la frecuencia virtual con la que aparecen los resultados.

Así que el siniestro de un asegurado es una variable aleatoria

$$X \leftarrow \text{variable aleatoria=siniestro}$$

con distribución de probabilidad

$$\mathbf{P}\Big(X = \pi_j\Big) = p_j, j = 1, 2, \ldots, n$$

La esperanza de la pérdida/siniestro es

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \pi_j p_j$$

¿Qué pagos ha de hacer la compañía de seguros?

Si $N = 1000$ es un "gran número, " la Ley de los Grandes Números (LdGN) nos dice que se debe esperar

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 & \rightarrow & 1000 \times p_1 \\ \pi_2 & \rightarrow & 1000 \times p_2 \\ \ldots\ldots & & \ldots \\ \pi_n & \rightarrow & 1000 \times p_n \end{array}$$

Total *esperado* de pagos a hacer:

$$\sum_{j=1}^{n} (1000 \times p_j) \times \pi_j$$

Prima pura

Valoración [Huygens]:

dividir el total esperado de pagos entre los asegurados:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(1000 \times p_j) \times \pi_j}{1000} = \sum_{j=1}^{n} p_j \times \pi_j$$

$$= \mathbf{E}(X)$$

$$= \textbf{prima pura}$$

EJEMPLO

Por ejemplo,

90 %	no tiene pérdida/siniestro
10 %	siniestro de 3000 euros

- pérdida media=$\mathbf{E}(X)$=300 euros $\leftarrow$ prima pura,
- los 1000 asegurados pagan un total de 300000 euros en primas
- los 100 con accidentes reciben

$$100 \times 3000 \text{ euros} = 300000 \text{ euros}$$

Gastos y comisiones . . .

. . . para gestionar pólizas, para administración, por gastos , por otros costes, . . .

. . . la prima se incrementa para cubrir estos gastos y costes.

EJEMPLO

Por ejemplo, si costes anuales son 30000 euros, la prima pura se incrementará en 30 euros, hasta los 330 euros.

¿Grandes Números?

$$\boxed{\text{Pérdida total} = Z = \sum_{i=1}^{1000} X_i = \sum \text{pérdidas individuales}}$$

Se supone independencia entre los siniestros, es decir, entre las X_i's.

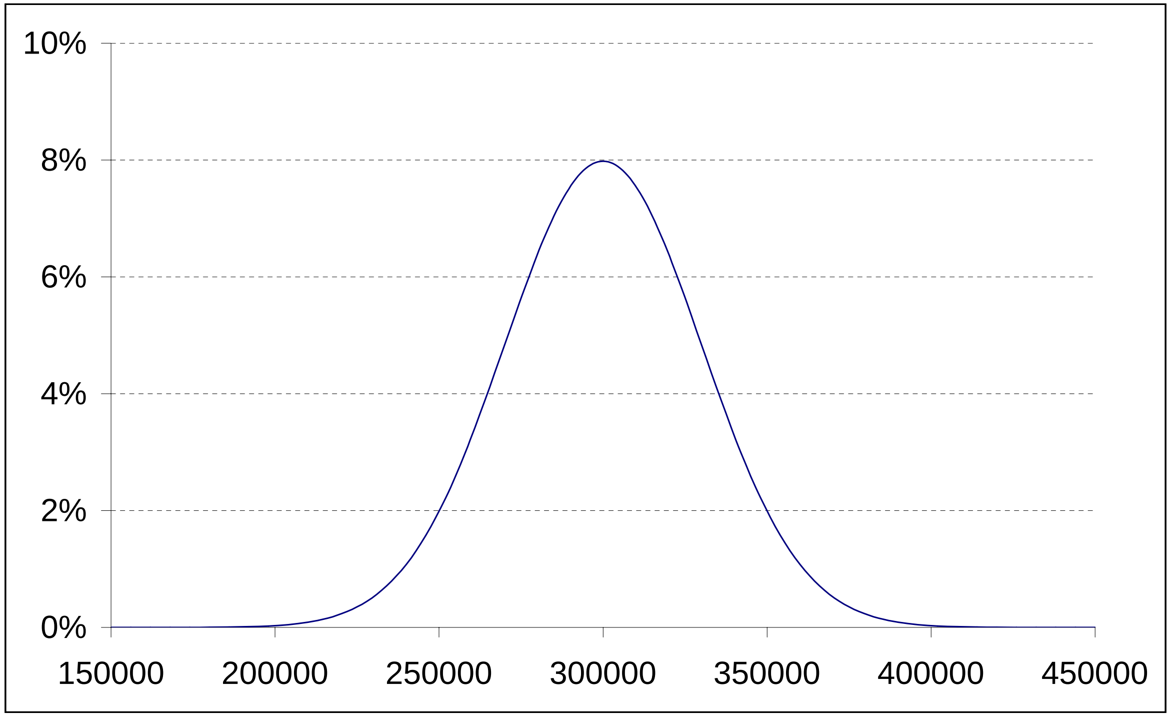
Z es, en realidad, variable aleatoria.

Sólo en la situación de la LdGN:

$$Z \equiv 1000 \times \mathbf{E}(X) = 1000 \times \text{prima pura}$$

Si N es bastante grande, ¿$N = 1000$?

$$Z \approx \mathcal{N}\text{ormal}\Big(\mathbf{E}(Z), \sigma(Z)\Big)$$



DISTRIBUCIÓN DE Z

La variable Z de pérdida total puede oscilar, y de hecho, oscilará.

¿Qué pasaría si Z tomara un valor mayor que $\mathbf{E}(Z)$? . . . no habría dinero para pagar todos los siniestros.

Las primas deben bastar para cubrir esas oscilaciones. Por ejemplo, para cubrir los valores de Z hasta el percentil 97,5 % (algo que ocurre 1 de cada 40 veces).

Como para una variable normal estándar, el 97,5 % de los casos queda por debajo del valor 2 (redondeando); la pérdida en ese percentil alcanzaría

$$\mathbf{E}(Z) + 2\sigma(Z)$$

y la prima necesaria para cubrir hasta ese extremo sería

$$\frac{\mathbf{E}(Z) + 2\sigma(Z)}{1000}$$

EJEMPLO

En el ejemplo,

$$\begin{cases} \mathbf{E}(Z) & = 300 \times 1000 = 300000 \\ \sigma(Y) & = 3000 \cdot \sqrt{1000 \times 10\,\% \times 90\,\%} \approx 30000 \end{cases}$$

así que

$$\mathbf{E}(Z) + 2\sigma(Z) = 300000 + 2 \times 30000 = 360000\,\text{euros}$$

y la prima debería ser al menos

$$\frac{360000}{1000} = 360\,\text{euros}$$

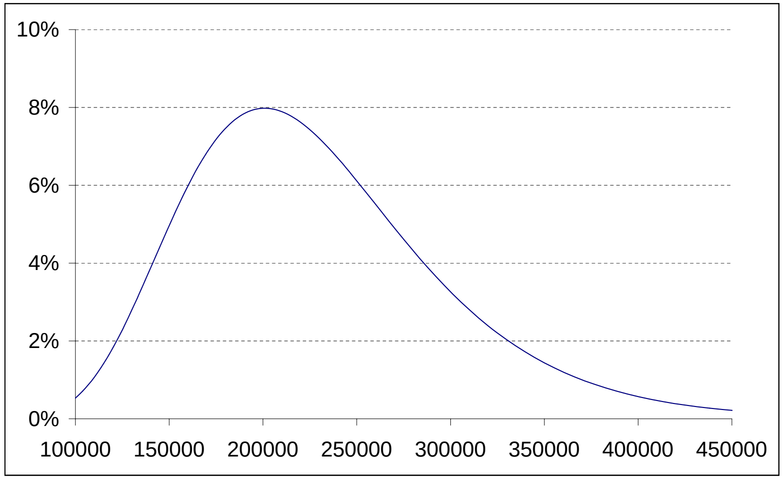
más los 30 euros de comisiones.

¿Cubre esta prima todos los posibles siniestros? NO.

Para cubrir todos los posibles siniestros haría falta que cada asegurado pagará una prima de 3000 que es el montante total asegurado.

Volveremos sobre esto.

Si N no es tan grande, la distribución no será aproximadamente normal:



DISTRIBUCIÓN DE Z

Entonces hay que determinar y tal que $\mathbf{P}(Z > y) = 2,5\,\%$ y

$$\text{prima} = \frac{E(Y) + y}{1000}$$

Cuanto mayor sea el número de asegurados, más proxima será la prima a la prima pura.

Capital

Accionistas ponen capital para cubrir los siniestros más allá de lo recaudado en primas.

Pongamos que los accionistas cubren hasta el 99,9 %, es decir, el tramo de pérdidas desde el 97,5 % hasta el 99,9 %.

Si N grande:

Usamos la aproximación normal y como

$$\mathbf{P}\Big(Z > \mathbf{E}(Z) + 3\sigma(Z)\Big) = 0,1\,\%$$

el capital K debe cubrir

$$\begin{aligned} K &= \Big[\mathbf{E}(Z) + 3\sigma(Z)\Big] - \Big[\text{primas}\Big] \\ &= \Big[\mathbf{E}(Z) + 3\sigma(Z)\Big] - \Big[\mathbf{E}(Z) + 2\sigma(Z)\Big] \\ &= \sigma(Z) \end{aligned}$$

Así que los accionistas han de poner $\sigma(Z)$.

EJEMPLO

K=30000 euros

Los accionistas, que arriesgan su dinero requieren remuneración, digamos de 20 %. Es decir, han de recibir 6000 euros, que incrementa la prima individual en otros 6.

EJEMPLO Prima=396 euros

¿independientes?

Pero, ¿es el año que viene, un año típico, normal?

El estudio inicial estadístico nos dice que el año típico, tiene distribución Z.

Pero si se analizaran con más detalle los datos se verá que, estilizadamente,

- en un año bueno (que ocurre $1/3$ de los años) la distribución de pérdidas es menos severa,
- en un año malo (que ocurre $1/3$ de los años) la distribución es más severa.

Para cada año dado, fijado, condicionando, . . . , los siniestros son independientes, pero, en realidad, sobre el año genérico son dependientes.

Hay que incrementar la prima, el capital para cubrir ese año malo.

Tenemos dos monedas,

1. Cara $1/3$ de las veces
2. Cara $2/3$ de las veces

Se escoge al azar con probabilidad de 50 % una de las dos monedas y se lanza dos veces . . .

Solvencia a largo plazo. Probabilidad de ruina.

Objetivo determinar capital K para que la compañía dure, y dure, y dure . . . .

Los pagos por siniestros de años sucesivos

$$Z_1, Z_2 \dots$$

son muestras independientes de una misma variable.

Las primas recaudadas cada año alcanzan P.

Queremos que con alta probabilidad

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j < nP + K, \qquad \text{para todo n}$$

o,

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(Z_j - P)}_{=Y_j} < K$$

$$\text{Ruina} = \left\{ \text{algún } n; \quad \sum_{j=1}^{n} Y_j > K \right\}$$

Se busca K para que

$$\mathbf{P}\left(\text{algún } n; \sum_{j=1}^{n} Y_j > K\right) = \alpha, \text{ pequeño}$$

ó

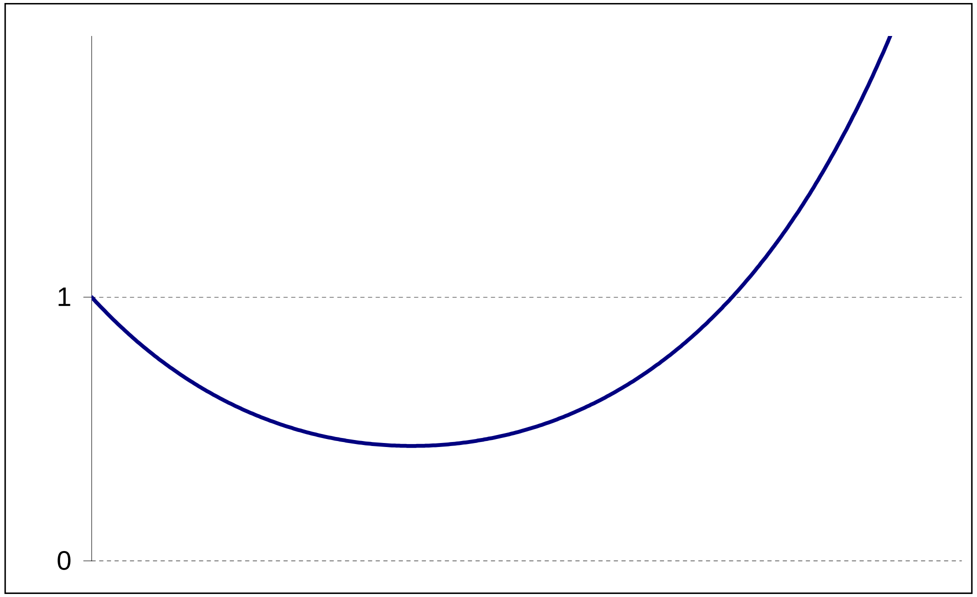
$$\mathbf{P}\left(\max_n \sum_{j=1}^{n} Y_j > K\right) = \alpha,$$

A la Markov (large deviations); $t > 0$

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{j=1}^{n} Y_j > K\Big) \leq \frac{\mathbf{E}\Big(e^{t\sum_j Y_j}\Big)}{e^{tK}} = \frac{\mathbf{E}\Big(e^{tY}\Big)^n}{e^{tK}}$$

$$t \to \Psi(t) = \mathbf{E}(e^{tY})$$

GRÁFICA DE $\boxed{t \longrightarrow \Psi(t) = \mathbf{E}(e^{tY})}$



- $\Psi(0) = 1$
- $\Psi'(0) = \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Z) - P < 0$, ¡faltaría más!
- $\Psi''(t) = \mathbf{E}(Y^2 e^{tY}) > 0$, convexo

Buscamos y encontramos T tal que $\Psi(T) = \mathbf{E}\Big(e^{TY}\Big) = 1$

Con ese T se tiene que <u>para cualquier año</u> n

$$\underline{\text{para cualquier año}}\ n \quad \mathbf{P}(\sum_{j=1}^{n} Y_j > K) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{TY})}{e^{TK}} = e^{-KT}$$

De hecho, más aún, CRAMER:

$$\mathbf{P}(\text{algún} \quad n; \sum_{j=1}^{n} Y_j > K) \leq e^{-KT}$$

CRAMER Con $S_j = \sum_{i=1}^{j} Y_i$; por inducción

$$\mathbf{P}\left(\max_{j\leq n} S_j > R\right) \leq \sum_{y_r\leq R} \mathbf{P}\left(\max_{j\leq n-1} S_j > R - y_r\right)\mathbf{P}\left(Y = y_r\right) + \mathbf{P}\left(Y > R\right) \leq$$

$$= \sum_{y_r\leq R} e^{-T(R-y_r)} p_r + \mathbf{P}\left(Y > R\right)$$

$$= e^{-TR} \sum_{y_r\leq R} e^{Ty_r} p_r + \sum_{y_r > R} p_r \leq$$

$$\leq e^{-TR} \sum_{y_r} e^{Ty_r} p_r$$

$$= e^{-TR}\mathbf{E}\left(e^{TY}\right)$$

$$\leq e^{-TR}$$

Así que si, una vez determinado T, se fija K como

$$e^{-TK} = \alpha$$

es decir

$$K = \frac{1}{T} \ln (1/\alpha)$$

se tendría que la probabilidad de ruina sería inferior a α.

EJEMPLO

- $Z = \mathcal{N}\text{ormal}\Big(\mathbf{E}(Z), \sigma(Z)\Big)$
- $p = \mathbf{E}(Z) + 2\sigma(Z)$
- $Y = Z - P = \mathcal{N}\text{ormal}\Big(-2\sigma(Z), \sigma(Z)\Big)$

Nota

X normal estándar: $\mathbf{E}(e^{tX}) = e^{t^2/2}$

$$\mathbf{E}(e^{tY}) = e^{-2t\sigma(Z)+t^2\sigma(Z)^2/2}$$

$$-2T\sigma(Z) + T^2\sigma(Z)^2/2 = 0 \Rrightarrow T = 4/\sigma(Z)$$

$$K = \frac{\sigma(Z)}{4}\ln(1/\alpha)$$

Con $\alpha = 0,1\,\%$:

$$K = \frac{\sigma(Z)}{4}\ln(1000) = \frac{30000}{4}\ln(1000) = 51808\,\text{euros}$$

¿Incentivos, competencia?

Y si se reducen las primas . . . por competir . . . ?

Y si se aceptan más pólizas . . . con el mismo capital . . . ?

Créditos a personas

incumplimiento=siniestro

- Bloque homogéneo
  - garantía,
  - capacidad de pago,
  - . . .
- Primas en función de distribución potencial de impacto de incumplimientos.
- Capital, . . .

Similar a seguros, pero más volátil, más sensible a cambios en entorno económico, más interdependencia.

Solvencia II, Basilea II

Riesgo de precio

Riesgo de valor: Riesgo de variación de valor de inversiones en activos

- Renta variable: acciones, tipos de cambio, . . .
- Renta fija:
  - Deuda soberana
  - Deuda empresas
  - Deuda interbancaria
  - Deuda hipotecaria (titulizaciones)

Valor=Precio “de mercado”:

Se quiere saber lo que valdría la cartera por si hubiera que liquidar.

- No sirve lo que está anotado en libros, (valor de compra/amortizaciones): reglas contables estáticas.
- Pero, si un bono paga sus flujos que cubren pasivos, ¿qué importa que baje o suba su valor de mercado?

Series históricas de variables financieras fundamentales:

- Renta variable:
  - Indices, acciones. . . .
  - Niveles, volatilidades.
- Renta fija
  - Curva de descuentos
  - Curvas de volatilidades

Modelos matemáticos para derivar valor de mercado de instrumentos complejos, que no cotizan

Estadística:

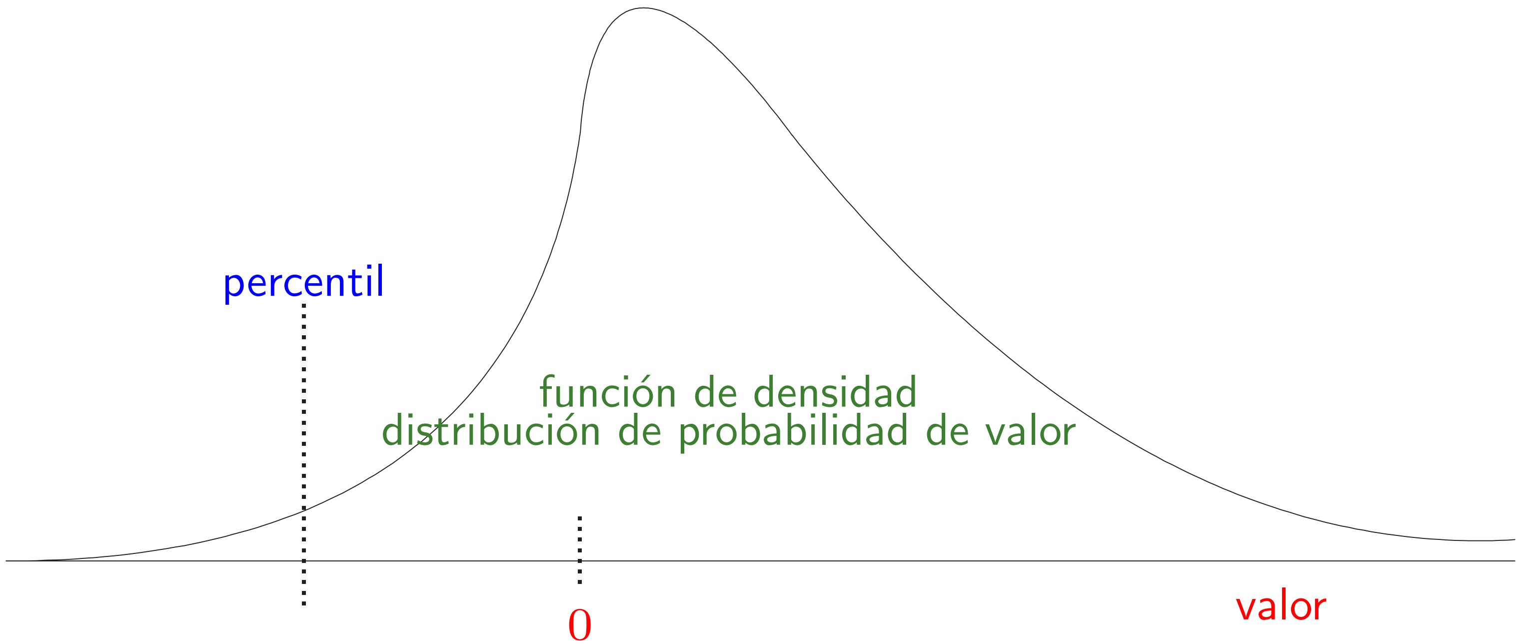
para inferir distribución de probabilidad de valores futuros de variables fundamentales.

escenario
variación de variables fundamentales
probabilidad

$\Rrightarrow$ **variación de valor de cartera**

Consecuencia

distribución de probabilidad de valor de cartera



Riesgo endógeno y feedback

El riesgo endógeno es el riesgo que proviene no de factores exógenos sino aquél que el propio sistema financiero genera y amplifica.

Los sistemas de riesgo al uso en las entidades financieras, de crédito o de seguros, intentan cubrir los riesgos exógenos.

El riesgo endógeno se genera por acciones combinadas de los agentes, que retroalimentan el sistema, precisa y perversamente,

La propia acción de cubrir, de protegerse contra esos riesgos exógenos, generan riesgo endógenos, que acaban siendo sistémicos y potencialmente mucho más dañinos.

Metáforas varias

El puente del Millenium. [J. Danielsson]

A priori, la probabilidad de sincronía en el paso es cero.

Pequeña perturbación externa, fuerza, por reacción, cierta sincronización del paso, que genera más perturbación, lo que a su vez reclama más sincronía, . . . , y así, hasta la casi sincronía total de la acciones, y . . . , el colapso.

Ruleta vs póker

Los sistema de riesgo al uso se enfrentan con el riesgo como si se tratara de gestionar el riesgo de un juego de ruleta o de lotería, donde hay un mecanismo aleatorio completamente externo sobre el que no se incide.

La realidad es que es más como las siete y media o, mejor, como el póker, en la que hay un mecanismo aleatorio, pero donde las acciones de los intervinientes cambian las probabilidades y generan acciones en otros intervinientes que cambian las probabilidades, ...

Mecanismos aleatorios retroalimentados.

El crash del 87

La inmunización de carteras consiste en incorporar a la cartera un instrumento que cubran las potenciales caídas (de un cierto tamaño relevante) con un cierto horizonte temporal largo. No hay tal instrumento en el mercado (si lo hubiera, el efecto sería el mismo), sino que hay que sintetizarlos.

El instrumento sintetizador es una opción put. Se sintetiza con contado y posición corta (de venta al descubierto) de índice (porque es para una cartera amplia). La cantidad de contado y de posición corta se va adaptando según vaya evolucionando las cotizaciones.

Suena bien. Cada tesorería, cada fondo de pensiones o de inversión, opta por esta estrategia. De hecho la gestión sintética puede automatizarse, encomendársela a un ordenador.

Si el índice baja o sube normalmente, todo fluye sin contratiempos.

Si, de repente hay una bajada de cierta importancia, la gestión de la inmunización sintética obliga a aumentar la posición corta en el índice, es decir, a vender índice, simultáneamente de todos las tesorerías, de las gestoras, los que hará bajar las cotizaciones, lo que obliga a vender más, ...

Y perversamente, endógenamente, por sí mismo, (con ordenadores cumpliendo a rajatabla) se da lugar a un crash.

- Crash del 87
- LTCM, Dollar/yen 98
- Ingrediente de 2007. Titulizaciones hipotecarias, volumen de credit default swaps,. . .
- La megacrisis del 2017-2018

⇛ Cuando la gestión es diversificada y granular (las acciones de cada uno no afectan al sistema), atender al riesgo exógeno con los sistema al uso puede ser suficiente.

⇛ Cuando la gestión no es diversificada (hay mucha gente haciendo exactamente lo mismo, con posiciones muy apalancadas (todo va bien), cubiertas/protegidas/inmunizadas (gestionando el riesgo), la gestión del riesgo exógeno no sólo no sirve de nada (atiende a los riesgos equivocados) sino que además retroalimenta el riesgo real, hasta la caída libre.